TOPLAM OLASILIK FORMÜLÜ VE BAYES FORMÜLÜ

Ω örnek uzayının B_1, B_2, … , B_n ayrık kümelerinin birleşimi şeklinde yazılabileceği varsayılsın. Buna göre A∈U gibi bir olayın olasılığı ile ilgilenildiği varsayılsın. Örnek uzay

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

şeklinde yazılabilir. A olayı ise

$$A=A\cap\Omega$$

olarak yazılırsa

$$A=A\cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$$

$$A=\bigcup_{k=1}^{n}(A \cap B_k)$$

$$P(A)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(A \cap B_k)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k)$$

olur. Koşullu olasılığın tanımından

$$P(A \cap B_k)=P(A/B_k).P(B_k)$$

yazıldığında Toplam olasılık formülü;

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(A/B_k).P(B_k)$$

olarak elde edilir. Bayes formülü ise A olayı verildiğinde bu A olayının B_k'dan olması olasılığı ise

$$P(B_k/A)=\frac{P(A/B_k).P(B_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A/B_k).P(B_k)}$$

$$P(B_k/A)=\frac{P(A/B_k).P(B_k)}{P(A)}$$

şeklindedir.

Örnek: Bir fabrikada üretilen ürünlerin %50 si birinci makinede, %30 u ikinci makinede ve %20 si üçüncü makinede üretilmektedir. Bu makinelerin ürettikleri ürünlerin sırasıyla %3, %4 ve %5 inin bozuk olduğu gözlenmiştir. Üretilen ürünlerden rastgele seçilen bir tanesinin bozuk olma olasılığı nedir?

Çözüm:

1.makine	2.makine	3.makine
%50	%30	%20
%3 bozuk	%4 bozuk	%5 bozuk

A={$seçilen$ ürünün $bozuk\ olması\ olayı$}

B_k={$seçilen$ ürünün $k.makinede$ ü$retilmiş\ olması\ olayı$}

olayları tanımlandığında Toplam olasılık fonksiyonu yardımıyla aranan olasılık

$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(A/B_k).P(B_k)$

$=P(A/B_1).P(B_1)+P(A/B_2).P(B_2)+P(A/B_3).P(B_3)$

$=(0,03).(0,50)+(0,04).(0,30)+(0,05).(0,20)$

$=0,037$

bulunur.

TAM BAĞIMSIZLIK

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in U$ olayları için,

$P(A_i \cap A_j)=P(A_i).P(A_j)$ $\quad i\neq j \quad i,j=1,2,\ldots,n$

(ikili bağımsızlık)

$P(A_i \cap A_j \cap A_k)=P(A_i).P(A_j).P(A_k)$ $\quad i\neq j\neq k \quad i,j,k=1,2,\ldots,n$

(üçlü bağımsızlık)

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)=P(A_1).P(A_2)\ldots P(A_n)$ $\quad$ n'li bağımsızlık

şartları sağlanıyor ise $A_1, A_2, \ldots, A_n$ olaylarına tam bağımsızdır denir. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ olaylarının tam bağımsız olduğunu göstermek için, 2^n-n-1 tane eşitlik kontrol edilmelidir.

Örnek: Bir zar atma deneyi ele alındığında A,B ve C olayları aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

A={1,2,3,4}

B=C={4,5,6}

A,B ve C olayları tam bağımsız mıdır?

Çözüm: 2^n-n-1=2^3-3-1=4 tane eşitlik kontrol edilmelidir. Bu deney için örnek uzay

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

şeklindedir.

$P(A)=\frac{s(A)}{s(\Omega)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$P(B)=\frac{s(B)}{s(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{2}{3}$

$P(C)=\frac{s(C)}{s(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$A\cap B=\{4\} \rightarrow P(A\cap B)=\frac{s(A\cap B)}{s(\Omega)}=\frac{1}{6}$

$A\cap C=\{4\} \rightarrow P(A\cap C)=\frac{s(A\cap C)}{s(\Omega)}=\frac{1}{6}$

$B\cap C=\{4,5,6\} \rightarrow P(B\cap C)=\frac{s(B\cap C)}{s(\Omega)}=\frac{3}{6}$

$A\cap B\cap C=\{4\} \rightarrow P(A\cap B\cap C)=\frac{s(A\cap B\cap C)}{s(\Omega)}=\frac{1}{6}$

1) $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

   $\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3}$

   olduğundan A ile B olayları bağımlıdır.

2) $P(A\cap C)=P(A).P(C)$

   $\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3}$

   olduğundan A ile C olayları bağımlıdır.

3) P(B∩C)=P(B).P(C)

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$

olduğundan B ile C olayları bağımlıdır.

4) P(A∩B∩C)=P(A).P(B).P(C)

$\frac{1}{6} = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

olduğundan A, B ve C olayları üçlü bağımsızdır. Ancak tam bağımsız değillerdir.

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.